2.15) $T([a\ b\ c]^T) = (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2$.

a) P/que sea isom., debe ser monom. y epim.

Pruebo que es monom. ($Nu(T) = \{0\}$).

$$(a+b)+(a+c)x+(b+c)x^2=0$$

Este polinomio es 0 si sus coef. son 0, entonces:

$$\begin{cases} a+b=0 \to a=-b \to \underline{a=0} \\ a+c=0 \to -b+c=0 \to c=b \to \underline{c=0} \\ b+c=0 \to b+b=0 \to 2b=0 \to \underline{b=0} \end{cases}$$

Por lo tanto $Nu(T)=\{0\}$ → es monomorfismo.

Pruebo que es epimorf. ($Im(T)=\mathbb{R}_2[x]$)

$$\left.\begin{array}{l} T([1\ 0\ 0]^T) = 1+x \\ T([0\ 1\ 0]^T) = 1+x^2 \\ T([0\ 0\ 1]^T) = x+x^2 \end{array}\right\} \to Im\,T = \langle (1+x), (1+x^2), (x+x^2) \rangle \quad \text{I}$$

Como (I) es LI y genera $\mathbb{R}_2[x]$, es base de la imagen y $Im(T) = \mathbb{R}_2[x]$, ya que también tiene su misma dimensión (3). Por lo tanto es epimorfismo y en consecuencia, isomorfismo.

b) $T([a\ b\ c]^T) = x \rightarrow$

$\rightarrow (a+b) + (a+c)x + (b+c)x^2 = x \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} a+b=0 \rightarrow a=-b \rightarrow \boxed{a=1/2} \\ a+c=1 \rightarrow -b+c=1 \rightarrow c=1+b \rightarrow \boxed{c=1/2} \\ b+c=0 \rightarrow b+1+b=0 \rightarrow 2b=-1 \rightarrow \boxed{b=-1/2} \end{cases}$$

$$\rightarrow \boxed{(a,b,c) = (1/2, -1/2, 1/2)}$$

c)
$$\begin{cases} a+b=a_0 \rightarrow a=a_0-b \ \text{(I)} \\ a+c=a_1 \rightarrow a_0-b+c=a_1 \rightarrow c=a_1-a_0+b \ \text{(II)} \\ b+c=a_2 \rightarrow 2b+a_1-a_0=a_2 \rightarrow \boxed{b=\frac{a_0}{2}-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}} \ \text{(III)} \end{cases}$$

(III) en (II) $\rightarrow c = a_1 - a_0 + \frac{a_0}{2} - \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2} \rightarrow \boxed{c = -\frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}}$

en (I) $\rightarrow a = a_0 - \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2} \rightarrow \boxed{a = \frac{a_0}{2} + \frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{2}}$

$$\rightarrow \boxed{(a,b,c) = \left(\frac{a_0+a_1-a_2}{2}, \frac{a_0-a_1+a_2}{2}, \frac{-a_0+a_1+a_2}{2}\right)}$$

d) Por el punto a) se que

$$\begin{cases} T([1\ 0\ 0]^T) = 1+x \\ T([0\ 1\ 0]^T) = 1+x^2 \\ T([0\ 0\ 1]^T) = x+x^2 \end{cases}$$

Por lo tanto $T^{-1}(v)$ debe cumplir:

$$\begin{cases} T^{-1}(1+x) = [1\ 0\ 0]^T \\ T^{-1}(1+x^2) = [0\ 1\ 0]^T \\ T^{-1}(x+x^2) = [0\ 0\ 1]^T \end{cases}$$

Como $\{1+x,\ 1+x^2,\ x+x^2\}$ es una base de $\mathbb{R}_2[x]$, puedo escribir un polinomio genérico de $\mathbb{R}_2[x]$ como c.l. de la base:

$$a_0+a_1x+a_2x^2 = \alpha_1.(1+x) + \alpha_2.(1+x^2) + \alpha_3.(x+x^2)$$

Por linealidad de T^{-1}:

$$T^{-1}(a_0+a_1x+a_2x^2) = \alpha_1.T^{-1}(1+x) + \alpha_2.T^{-1}(1+x^2) + \alpha_3.T^{-1}(x+x^2) \rightarrow$$

$$\rightarrow T^{-1}(a_0+a_1x+a_2x^2) = \alpha_1.[1\ 0\ 0]^T + \alpha_2.[0\ 1\ 0]^T + \alpha_3.[0\ 0\ 1]^T \rightarrow$$

$$\rightarrow T^{-1}(a_0+a_1x+a_2x^2) = [\alpha_1\ \ \alpha_2\ \ \alpha_3]^T \quad \text{I}$$

Para calcular los $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ vuelvo a la CL planteada al principio:

$$a_0+a_1x+a_2x^2 = \alpha_1.(1+x) + \alpha_2.(1+x^2) + \alpha_3.(x+x^2)$$

$$\rightarrow a_0+a_1x+a_2x^2 = (\alpha_1+\alpha_2) + (\alpha_1+\alpha_3)x + (\alpha_2+\alpha_3)x^2$$

Entonces

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2 = a_0 \rightarrow \alpha_1 = a_0-\alpha_2 \rightarrow \boxed{\alpha_1 = \frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}-\frac{a_2}{2}} \\ \alpha_1+\alpha_3 = a_1 \rightarrow a_0-\alpha_2+\alpha_3 = a_1 \rightarrow \alpha_2 = a_0-a_1+\alpha_3 \rightarrow \boxed{\alpha_2 = \frac{a_0}{2}-\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}} \\ \alpha_2+\alpha_3 = a_2 \rightarrow a_0-a_1+2\alpha_3 = a_2 \rightarrow \boxed{\alpha_3 = -\frac{a_0}{2}+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2}} \end{cases}$$

Por lo tanto: $\boxed{T^{-1}(a_0+a_1x+a_2x^2) = \left[\frac{a_0+a_1-a_2}{2}\ \ \frac{a_0-a_1+a_2}{2}\ \ \frac{-a_0+a_1+a_2}{2}\right]^T}$

que me podría haber dado cuenta por el ej. c) que es lo mismo.